E-school di Arrigo Amadori

Analisi I

Integrali di Riemann

01 – Introduzione.

L’integrale è, oltre alla derivata, l’altro “oggetto” fondamentale che sta alla base del calcolo differenziale. Con gli integrali si calcolano principalmente le aree ed i volumi ma, dato il legame stretto fra derivate ed integrali, essi entrano direttamente nelle soluzioni delle equazioni differenziali. Gli integrali costituiscono essi stessi le cosiddette equazioni integrali dove, invece delle derivate, sono presenti gli integrali delle funzioni incognite.

Ciò è di estrema importanza perché una equazione integrale può in linea di principio essere meglio approssimata numericamente di una analoga equazione differenziale (omettiamo la dimostrazione di questa affermazione perché trattata altrove). Essendo la soluzione analitica (esatta) delle equazioni differenziali possibile solo in pochissimi casi, si capisce ancora di più l’importanza degli integrali : data una equazione differenziale, ove possibile, è conveniente trasformarla in equazione integrale e poi approssimarne le soluzioni tramite tecniche di calcolo numerico.

02 – La misura.

Alla base della teoria degli integrali sta la teoria della misura che stabilisce i concetti e le regole riguardo alla misurazione degli insiemi di numeri reali (anche dei sottoinsiemi del prodotto cartesiano R • = R x R x …). Qui occorre solo introdurre alcuni concetti fondamentali relativi alla misura su R . La trattazione completa della teoria della misura verrà fornita altrove.

Dato un intervallo limitato A di estremi a e b con $a \leq b$, si definisce misura dell’intervallo il numero $b – a$ e si indica con :

$$\text{mis } A = b - a$$

Un insieme vuoto misura 0 in quanto può essere considerato come un intervallo aperto del tipo $]a , a[$ (per cui $\text{mis } A = a – a = 0$). Un insieme costituito da un solo punto ha anche esso stesso misura nulla, perché può essere considerato come un intervallo chiuso $[a , a]$ (contenente solo il punto a).

Il concetto di misura nulla può essere generalizzato ad insiemi più complessi dei due esempi dati tramite il concetto di **insieme di misura nulla secondo Lebesgue**

Sia A un sottoinsieme proprio di R . Si dice che A ha misura nulla secondo Lebesgue o L-misura nulla e si scrive •(A) = 0 se per ogni ε reale positivo esiste un insieme finito o numerabile di intervalli aperti I_n con n appartenente ad un sottoinsieme M di N tale che :

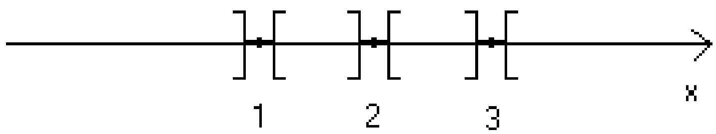
$$A \subset \bigcup_{n \in M} I_n$$

$$\sum_{n \in M} mis I_n < \varepsilon$$

Esempi :

- 1 - la misura dell'insieme vuoto è nulla (già dimostrato)

- 2 - ogni sottoinsieme finito di R è un insieme di L-misura nulla. Lo possiamo intuire graficamente, per esempio, nel caso di A = {1, 2, 3}:



Infatti, per ogni ε reale positivo, si possono prendere tre intervalli aperti la cui somma delle misure è minore di ε e che contengono l'insieme A

- 3 – l'insieme dei numeri naturali N è di L-misura nulla. Ciò si intuisce come estensione dell'esempio precedente

- 4 - ogni sottoinsieme numerabile di R ha L-misura nulla. In particolare l'insieme Q dei numeri razionali (omettiamo la dimostrazione che è intuibile dalle considerazioni precedenti).

Il concetto di L-misura nulla è molto importante perché introduce il concetto di **quasi-dappertutto**.

Una affermazione fatta relativamente agli elementi di un sottoinsieme A di R , se vale per tutti i punti di A eccetto che per i punti di un sottoinsieme di A di L-misura nulla, si dice che vale quasi-dappertutto su A .

Come esempio consideriamo la funzione :

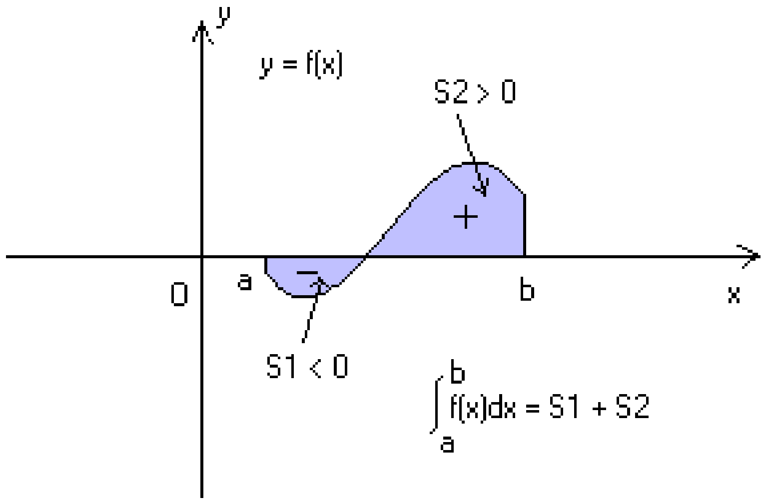
$y = 1 / x$, per $x \neq 0$

$y = 0$, per $x = 0$

essa è continua su tutto R eccetto che per $x = 0$. Essendo l'insieme {0} di L-misura nulla, la funzione è continua quasi-dappertutto su R .

03 – Definizione di integrale.

L'integrale di una funzione fra due punti rappresenta la misura dell'area che il grafico della funzione forma con l'asse delle ascisse considerando l'area con segno positivo se la funzione è positiva, negativo se la funzione è negativa :



Questo è il significato geometrico dell'integrale. Per definirlo analiticamente si può pensare di dividere la superficie in questione in parti che la approssimano e sommarne le aree. In questo modo si ottiene una misura approssimata dell'area. Prendendo parti sempre più piccole (di area più piccola) ma in numero maggiore si approssima sempre meglio l'area cercata che viene ottenuta così come limite della somma di infiniti parti infinitamente piccole.

Vediamo come questo processo si può definire rigorosamente.

Consideriamo una funzione f definita sull'intervallo limitato e chiuso [a, b] . Consideriamo una **scomposizione finita** σ dell'intervallo.

Per scomposizione finita di un intervallo si intende un insieme di punti dell'intervallo {x0, x1, …, xn} con $a = x0 < x1 < x2 \ldots < xn = b$. Ogni intervallo $Ik = [xk-1 , xk]$ con k da 1 ad n si chiama componente della scomposizione. Se una scomposizione contiene un'altra scomposizione, si dice che è più fine dell'altra. L'insieme di tutte le scomposizioni finite dell'intervallo [a , b] si indica con $\Omega(a , b)$.

Scelti arbitrariamente n punti $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ ciascuno appartenente agli n intervalli componenti della scomposizione σ si consideri la somma :

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot misI_k$$

Si dice che f è integrabile su [a , b] se esiste il limite di tale somma, ovvero se esiste S reale tale che :

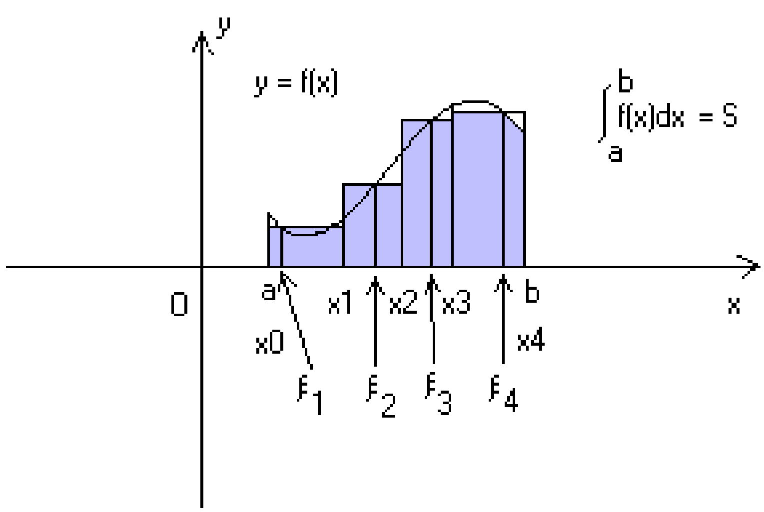
$$\forall \varepsilon \in R \exists \delta(\varepsilon) \in R^+ \ni \left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot misI_k - S \right| < \varepsilon$$

per ogni scomposizione σ appartenente ad Ω (a , b) tale che mis Ik < $\delta(\varepsilon)$ per ogni k e qualunque sia la scelta dei punti $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

Il limite S , se esiste, si chiama **integrale di Riemann** e si scrive :

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Graficamente :



Esiste un'altra definizione di integrale di Riemann (basata sulle somme inferiori e superiori che si ottengono prendendo i min e max della funzione negli intervalli in cui viene scomposto [a,b]) che è equivalente a questa che preferiamo per la sua immediatezza.

Il simbolo $\int$ è una Σ stilizzata ed indica appunto che l'integrale è una somma. Il simbolo dx indica la misura infinitesima degli intervalli componenti la scomposizione. $\int f(x)dx$ indica, quindi, la somma di infiniti addendi ciascuno dei quali è l'area di un rettangolo di base dx ed altezza f(x) lungo tutto l'intervallo [a , b] .

L'insieme delle funzioni numeriche reali definite sull'intervallo [a , b] che sono integrabili secondo Riemann (per cui esiste l'integrale secondo Riemann) è denotato con

R [a , b] .

Per l'esistenza dell'integrale di una funzione definita su un intervallo vale il fondamentale teorema di Lebesgue-Vitali (omettiamo la dimostrazione) :

> una funzione numerica reale definita su [a , b] è integrabile secondo Riemann se e solo se è ivi limitata e continua quasi-dappertutto.

Esempi :

- 1 - l'integrale della funzione y = c , dove c è un numero reale, sull'intervallo [a , b] vale c * (b –a) in quanto la funzione rappresenta una retta parallela all'asse delle ascisse per cui l'integrale è l'area del rettangolo di base [a , b] ed altezza c . Algebricamente, utilizzando la definizione di integrale :

$$S = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} c \cdot misI_k = c \cdot \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} misI_k = c(b-a)$$

- 2 - l'integrale della funzione y = x sull'intervallo [0 , 1] vale 1/2 per ovvie considerazioni geometriche. Algebricamente :

$$S = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \left(k \cdot \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} k = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} \cdot (1+2+\ldots+n) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2}$$

dove abbiamo scomposto l'intervallo [0 , 1] in n intervalli di misura 1/n ed abbiamo preso per il calcolo l'estremo destro di ogni intervallo componente.

04 – Calcolo dell'integrale (impostazione del problema).

Per il calcolo dell'integrale, purtroppo, non esistono formule generali come per il calcolo della derivata per cui un integrale è calcolabile analiticamente (esattamente) solo in pochi casi. In particolare non esiste una formula per l'integrale del prodotto o del rapporto fra due funzioni.

Nella prassi, il calcolo di un integrale viene approssimato con l'uso di tecniche di calcolo numerico al calcolatore. L'approssimazione di un integrale è un problema di semplice soluzione (esistono vari metodi molto efficaci) e si possono ottenere approssimazioni grandi a piacere, fino alla precisione massima di un computer (essendo l'integrale approssimabile da una somma di prodotti).

Passiamo ora in rassegna ad alcuni importanti teoremi utilizzabili nel calcolo dell'integrale (omettiamo le dimostrazioni).

- 1 - Siano f e g due funzioni appartenenti ad R[a , b] (integrabili nel senso di Riemann sull'intervallo [a , b]). Si ha che le funzioni definite su [a , b] :

f + g

f * g

f / g se g ≠ 0 nell'intervallo [a ,b]

c * f dove c è un numero reale

|f|

appartengono ad R[a , b] .

- 2 - Sia f appartenente ad R[a , b] e c un punto di [a , b] . Si ha :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

- 3 - Siano f e g appartenenti ad R[a , b] . Si ha (teorema di linearità) :

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$
$$\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx$$

dove c è un numero reale.

- 4 - Siano f e g appartenenti ad R[a , b] . Sia f(x) ≤ g(x) quasi-dappertutto su [a , b] . Si ha :

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

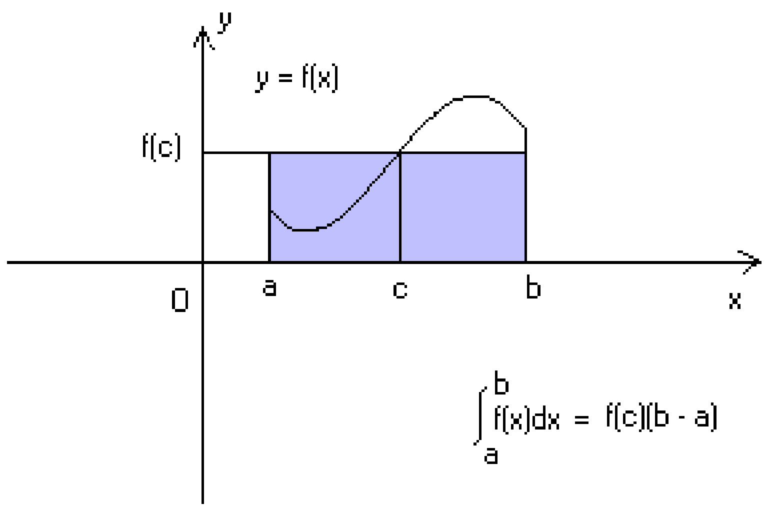
\- 5 - Sia f appartenente ad R[a , b] allora esiste • reale tale che (teorema della media) :

$$\int_a^b f(x)dx = \mu \cdot (b-a)$$

se di più f è continua su [a , b] allora esiste un c appartenente all'intervallo tale che :

$$\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b-a)$$

graficamente :



\- 6 - Sia f appartenente ad R[a , b] . Si conviene di porre :

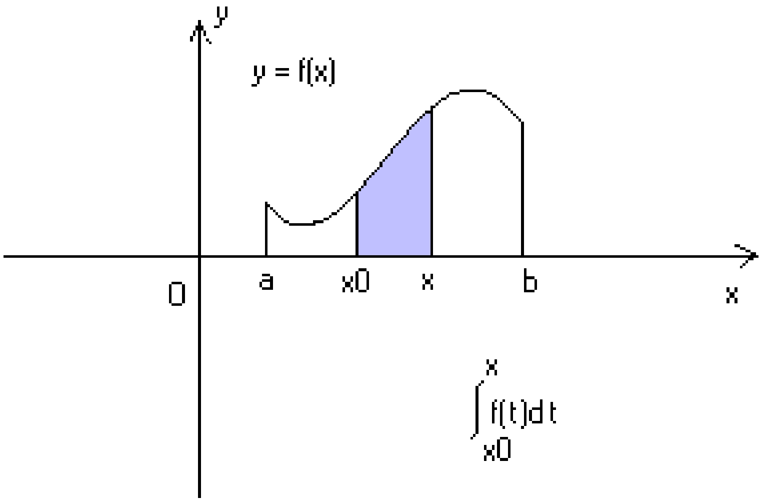
$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

05 – Teorema fondamentale del calcolo integrale.

Sia f appartenente ad R[a , b] e sia x0 un punto di [a , b] . Consideriamo la funzione :

$$x \to \int_{x_0}^x f(t)dt$$

graficamente :



Questa è una funzione assolutamente continua ed è chiamata **funzione integrale**. Essa ha derivata in tutti i punti in cui f è continua (quindi quasi-dappertutto su [a , b]) e vale la formula (omettiamo la dimostrazione) :

$$\frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} f(t)dt = f(x)$$

che è la formula fondamentale del calcolo integrale.

Questa formula esprime il legame fra derivata ed integrale è alla base del calcolo integrale.

06 – Calcolo dell’integrale.

Data una funzione numerica reale f definita su [a , b] si definisce **primitiva** di f una funzione continua Φ su [a . b] tale che :

$$\frac{d}{dx}\Phi(x) = f(x)$$

per ogni punto di [a , b] . Le primitive di una funzione sono ovviamente infinite. Infatti se Φ è una primitiva di f lo è anche Φ + c , dove c è un qualunque numero reale. Esistono anche funzioni che non hanno primitiva.

Una primitiva della funzione f si chiama anche **integrale indefinito** (in contrapposizione con l’integrale fra due punti detto anche **integrale definito**) e si indica con ∫ f(x) dx .

Esempi di primitive :

- y = c à Φ = cx

- y = x à Φ = (1/2) *x ^ 2 (dove ^ indica l’operatore di elevamento a potenza)

- y = x ^ 2 à Φ = (1/3) *x ^ 3
- … …
- y = x ^ n à Φ = (1 / (n + 1)) * x ^ (n + 1)
- y = sen x à Φ = - cos x
- y = cos x à Φ = sen x

La determinazione di una primitiva di una funzione data può essere considerata come l'operazione inversa del calcolo della derivata di una funzione. Si tratta quindi di trovare una funzione la cui derivata eguaglia la funzione data.

Questo problema non è risolubile in modo generale. Non esistono formule generali per trovare la primitiva di una funzione data (così come invece esistono per trovare la derivata di una funzione). Ci si basa soprattutto sull'intuito e su una buona conoscenza delle derivate delle funzioni di uso comune.

Ricavare una primitiva di una funzione data è fondamentale perché un basilare teorema (di cui non diamo la dimostrazione) afferma che :

se f è una funzione continua su [a , b] e Φ è una sua primitiva allora :

$$\int_a^b f(x)dx = \left|\Phi(x)\right|_a^b = \Phi(b) - \Phi(a)$$

Il calcolo di un integrale si riduce allora nel trovare una primitiva di una funzione.

Esempio :

$$\int_0^\pi sen x dx = \left|-\cos x\right|_0^\pi = -\cos\pi - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2$$

07 – Integrazione per sostituzione.

In presenza di funzioni composte, un integrale può essere semplificato in vista di una possibile soluzione.

Si ha l'importante teorema detto dell'**integrazione per sostituzione** (diamo qui una versione del teorema più restrittiva ma di più semplice utilizzo (omettiamo la dimostrazione)) :

Sia f una funzione continua su [a , b] e sia g una funzione continua crescente o decrescente su [a ,b] (e quindi invertibile) dotata di derivata prima su [a , b] .
Allora si ha :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))g'(t)dt$$

dove g • ¹ indica la funzione inversa di g .

Come esempio di integrazione per sostituzione calcoliamo l'integrale :

$$\int_0^\pi \cos(2x)dx$$

sostituendo ad x la funzione x = g(t) = t / 2 e tenendo presente che g'(t) = 1/2
e che la funzione inversa di g è t = 2x , si ottiene :

$$\int_0^\pi \cos(2x)dx = \int_0^{2\pi} \cos t \cdot \frac{1}{2}dt = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{2\pi} \cos t dt = \frac{1}{2} \cdot \left| sent \right|_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\left(sen 2\pi - sen 0\right) = 0$$

08 – Integrazione per parti.

Nel caso che la funzione integranda contenga come fattore una derivata, è possibile utilizzare il teorema dell'**integrazione per** parti. In questo modo, dove possibile, si può tentare di semplificare l'integrale al fine di pervenire ad una sua soluzione (omettiamo al dimostrazione) :

siano f e g due funzioni continue su [a, b] ed ivi dotate di derivate prime esse stesse continue su [a , b] . Allora si ha :

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \left| f(x)g(x) \right|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Come esempio di integrazione per parti calcoliamo l'integrale :

$$\int_0^\pi x \cos x dx$$

considerando che cos x è la derivata di sen x e che 1 è la derivata di x , si ottiene :

$$\int_0^\pi x \cos x dx = \left| x sen x \right|_0^\pi - \int_0^\pi 1 \cdot sen x dx = \pi sen \pi - 0 sen 0 - \left| -\cos x \right|_0^\pi = -\left(-\cos\pi + \cos 0\right) = -2$$

09 – Integrale generalizzato (o improprio).

La definizione di integrale di Riemann è relativa alle funzioni numeriche reali definite sull'intervallo [a , b] . La definizione può essere estesa, generalizzata, anche per funzioni definite sugli intervalli [a , b[,]a , b] , [a , +∞[e]-∞ , b] se il limite dell'integrale di Riemann nei punti dove la funzione non è definita od agli infiniti (positivo e negativo) converge. Più precisamente :

- se f è definita su [a , b[ed è integrabile su [a , b - ε] per ogni ε > 0 , ε < b – a ed è reale il limite :

$$\lim_{x \to b-} \int_a^x f(t)dt$$

- se f è definita su]a , b] ed è integrabile su [a + ε , b] per ogni ε > 0 , ε < b – a ed è reale il limite :

$$\lim_{x \to a+} \int_x^b f(t)dt$$

- se f è definita su [a , +∞[ed è integrabile su [a , b] per ogni b > a ed è reale il limite :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)dt$$

- se f è definita su]- ∞ , b] ed è integrabile su [a , b] per ogni a < b ed è reale il limite :

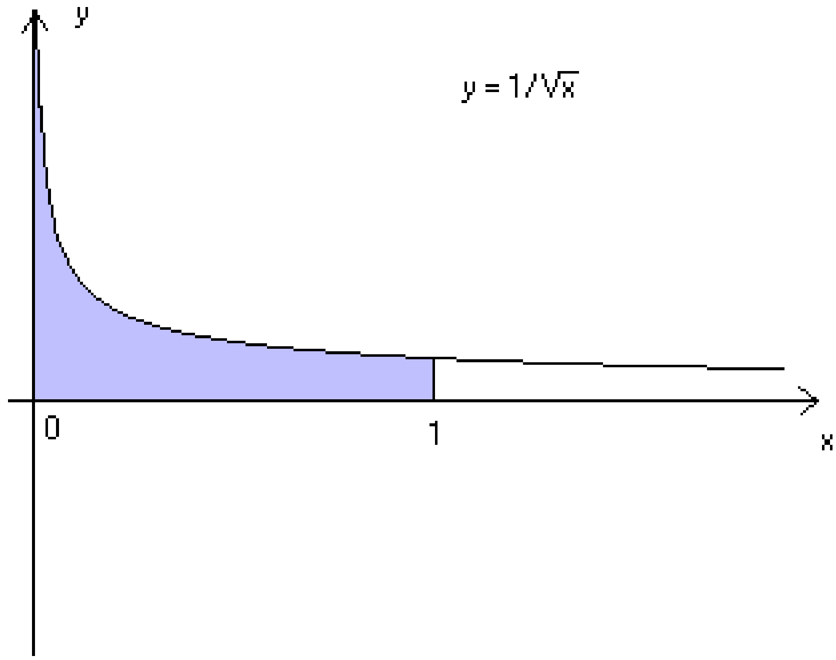
$$\lim_{x \to -\infty} \int_x^b f(t)dt$$

In tutti questi casi si dice che la funzione è **integrabile in senso generalizzato (od improprio)**.

Esempi :

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}dx = \lim_{x \to 0^+} \left| \frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \right|_x^1 = \lim_{x \to 0^+} \left| \left(\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right) \right|_x^1 = 2 \cdot \lim_{x \to 0^+} \left(1^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}} \right) = 2$$

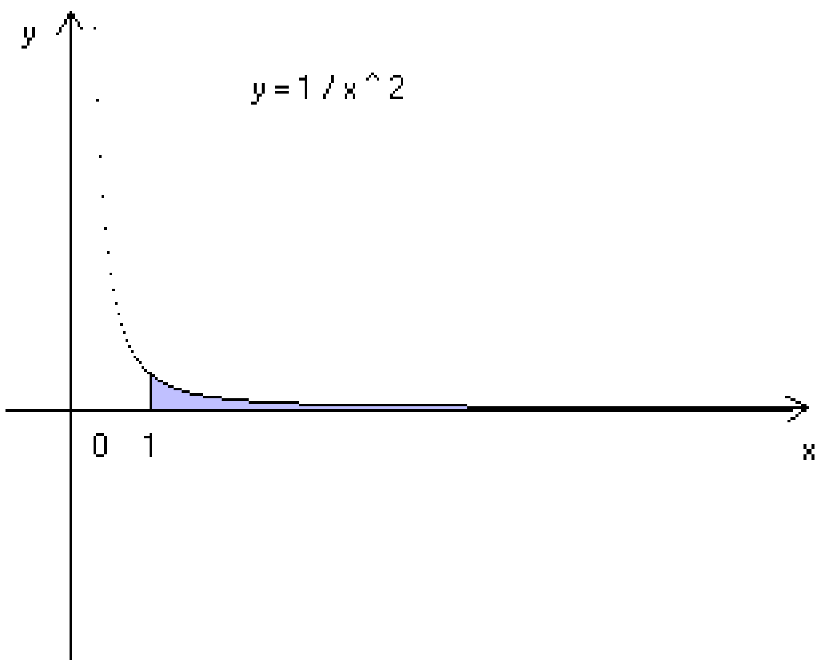
graficamente :



la funzione pur essendo divergente in 0 , è integrabile in senso generalizzato su [0 , 1] .

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \int_1^{+\infty} x^{-2} dx = \lim_{x \to +\infty} \left| \frac{t^{-1}}{-1} \right|_1^x = \lim_{x \to +\infty} \left(-x^{-1} + 1^{-1} \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{x} + 1 \right) = 1$$

graficamente :



Esistono due importanti teoremi che assicurano se una funzione è integrabile in senso generalizzato che si riferiscono ai concetti di infinitesimi e d infiniti (omettiamo le dimostrazioni) :

- 1 - Sia f una funzione definita su [a , +∞[integrabile su [a , b] per ogni b > a . Sia f un infinitesimo per x à +∞ . Se l'ordine di f rispetto ad 1/x per x à +∞ è maggiore di 1 allora f è integrabile in senso generalizzato su [a , +∞[.

- 2 - Sia f una funzione definita su [a , b[integrabile su [a , b - ε] per ogni ε positivo e minore di b - a . Sia f un infinito per x à b- . Se l'ordine di f rispetto ad 1 / (b – x) per x à b- è minore di 1 allora f è integrabile in senso generalizzato su [a , b] .

Infine, se la funzione |f| è integrabile in senso generalizzato si dice che f è **assolutamente integrabile in senso generalizzato**. Se una funzione è assolutamente integrabile in senso generalizzato è anche integrabile in senso generalizzato. L'inverso non è vero.

Fine.

Pagina precedente

Home page